

基于有理分式惩罚的手机直连稀疏信道均衡算法

王承振, 边东明, 张更新

(南京邮电大学通信与信息工程学院, 江苏 南京 210003)

摘要: 基于 3GPP 协议及 ITU-R 标准模型, 手机直连卫星场景下, 卫星信道受到视距 (LoS, line of sight) 径能量的主导, 其时延扩展显著低于地面非视距 (NLoS, non-line of sight) 场景, 在离散时延域表现出极强的稀疏性, 传统 LMS 算法由于缺乏结构约束, 其稳态误差受零抽头噪声波动影响剧烈, 存在收敛速度慢、稳态误差高的问题, 因此, 本文在零吸引 LMS (ZA-LMS, zero-attracting least mean squares)、重加权零吸引 LMS (RZA-LMS, reweighted zero-attracting least mean squares) 的基础上, 提出一种基于有理分式惩罚项的改进稀疏最小均方算法 (Rational-LMS, rational least mean squares), 推导了其权系数的随机梯度下降更新公式。该算法利用有理分式函数在原点附近的高灵敏度梯度以及在大系数区域的快速衰减特性, 在有效滤除噪声分量的同时, 实现了对均衡器系数的稳定收敛, 从而在数学逻辑上更贴近 l_0 范数的理想约束; 进一步地, 引入参数自适应更新机制, 使得算法能够根据误差动态调整稀疏惩罚系数, 从而实现更低的稳态误差与更快的收敛速度。理论分析与仿真结果证明, 在稀疏信道环境下, 所提算法的收敛速率与稳态均方误差 (MSE, mean squared error) 性能均优于 ZA-LMS 和 RZA-LMS 算法。

关键词: 自适应滤波; 稀疏信道; l_0 范数; 惩罚项

中图分类号: TN927.2

文献标志码: A

doi: 10.11959/j.issn.2096-3750.XXXX.

Sparse Channel Equalization for Direct-to-Satellite Smartphone Communications Using a Rational-Function Penalty

WANG Chengzhen, BIAN Dongming, ZHANG Gengxin

China School of Communication and Information Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210000, China

Abstract: Based on the 3GPP specifications and ITU-R standardized channel models, in direct-to-satellite smartphone scenarios, the satellite channel is dominated by the energy of the line-of-sight (LoS) path. Consequently, its delay spread is significantly smaller than that in terrestrial non-line-of-sight (NLoS) environments, exhibiting strong sparsity in the discrete delay domain. Due to the lack of structural constraints, the conventional least mean squares algorithm is highly sensitive to noise fluctuations on zero taps in the steady state, resulting in slow convergence and high steady-state error. Therefore, building upon the zero-attracting LMS (ZA-LMS) and reweighted zero-attracting LMS (RZA-LMS), this paper proposes an improved sparse least mean squares algorithm with a rational-function penalty, termed rational least mean squares (Rational-LMS), and derives its stochastic gradient descent-based weight update equation. By exploiting the high-sensitivity gradient of the rational-function penalty near the origin and its rapid attenuation in the large-coefficient region, the proposed algorithm effectively suppresses noise components while ensuring stable convergence of the equalizer coefficients, thereby yielding a regularization effect that is mathematically closer to the ideal l_0 -norm constraint. Furthermore,

收稿日期: XXXX-XX-XX; 修回日期: XXXX-XX-XX

通信作者: 边东明, bian_dm@163.com

基金项目: 雄安新区科技创新专项(2025XAGG0029)

Foundation Items: Science and Technology Innovation Program of Xiongan New Area (Grant No. 2025XAGG0029)

an adaptive parameter update mechanism is introduced to dynamically adjust the sparsity penalty factor according to the instantaneous error, thereby achieving faster convergence and lower steady-state mean squared error (MSE). Theoretical analysis and simulation results demonstrate that, in sparse channel environments, the proposed Rational-LMS outperforms ZA-LMS and RZA-LMS in terms of both convergence rate and steady-state MSE performance.

Key words: adaptive filtering, sparse channel, l_0 -norm, penalty term

0 引言

随着新一代通信技术向非地面网络及高频段演进,传统的统计信道模型已难以完全涵盖新兴场景的特性。在手机直连卫星等非地面网络链路中,卫星高速移动会引入显著的多普勒频移与时变效应,使信道呈现时延扩展和多普勒扩展的特征,从而对接收机的信道获取与均衡算法提出更高要求。文献^[1]利用角度-时延域结构提出两阶段信道估计与高效实现方案,以应对高机动条件下的CSI获取挑战;同时文献^[2]针对LEO下行OFDMA的宽范围多普勒偏移提出多级补偿策略,凸显了多普勒处理对后续均衡与检测性能的重要性。文献^[3-6]讨论了卫星Direct-to-Cell接入架构和5G NR NTN中的多普勒移频估计问题,文献^[7-8]分别基于DM-RS辅助和半盲机制改进高机动NTN/LEO场景下的信道估计性能。在高机动波形方面,OTFS通过在延迟——多普勒域表征信道,为均衡器设计提供结构化视角,并提出面向OTFS的均衡方法与低复杂度线性等化方案^[9-10]。文献^[11-14]分别从LEO场景下的联合信道估计与数据检测、随机接入信道估计、以及OTFS与OFDM在多用户LEO通信中的适配性等角度展开研究,进一步说明基于延迟——多普勒域的结构化处理有助于提升高动态卫星链路中的均衡与检测能力。

近年来,非地面网络已从体制研究逐步走向面向移动终端的实际部署。3GPP对NTN的研究已将手持终端直接接入纳入典型场景,并指出手机直连卫星场景下面向低成本手持终端的接入方式,使传播时延、多普勒变化、终端发射功率、导频开销和在线跟踪能力共同成为接收机设计中的重要约束^[15-17]。虽然频域均衡在宽带频率选择性信道中已得到广泛应用^[18],但是面向手机直连卫星场景,现有频域均衡难以充分利用信道在时延域的稀疏特征,而抽头均衡能够直接对少量有效路径进行建模,更符合强主径、短时延支撑的卫星信道结构,

能够以较低复杂度完成迭代更新。引入稀疏先验有助于减少对近零抽头的无效更新,提高对有效路径的估计精度,从而改善均衡器的收敛与稳态性能。在手机直连卫星这类LoS主径占优、离散时延支撑有限且信道持续时变的接收场景中,研究稀疏抽头均衡仍具有明确的研究意义^[19-20]。

在手机直连卫星、毫米波通信等以强视距路径为主导的链路中,信道冲激响应(CIR, channel impulse response)在离散时延域呈现为稀疏或近稀疏性结构,即能量主要集中于LoS径及少数离散反射径或散射径,大量抽头系数趋于零或接近于零。由于传统LMS的更新机制^[21]并未显式利用这种稀疏先验,算法在迭代过程中仍需对大量近零抽头进行无效更新,导致噪声扰动在零抽头处持续累积。这不仅限制了算法的稳态误差底限,还显著降低了其在导频资源受限或信道快变环境下的收敛速度。

针对稀疏环境下传统LMS的性能瓶颈,既有研究主要演化出两类改进路径:其一是基于统计检测或启发式阈值的选择性更新策略^[22-26],旨在通过关断无效抽头的更新以抑制噪声牵引;其二是采用成比例步长策略^[27-28],通过动态分配更新增益来加速活跃抽头的收敛。然而,前者高度依赖于判决统计量的精确度以及阈值的选取;后者在处理高动态范围系数时,其步长分配机制往往难以兼顾初始收敛速率与稳态精度的平衡。

在稀疏正则化框架下,受最小绝对收缩与选择算子(LASSO, least absolute shrinkage and selection operator)与压缩感知相关思想启发^[29-33],文献^[34]将稀疏惩罚项引入LMS代价函数,提出了ZA-LMS与RZA-LMS等算法。其中,ZA-LMS通过 l_1 正则引入零吸引项,可在稀疏场景下改善收敛与稳态性能,但其幅度无关的恒定收缩会在非零抽头处引入稳态偏差。RZA-LMS通过重加权机制减弱了大抽头偏置,但在高动态范围稀疏信道中,仍可能对弱有效抽头产生过强收缩。因而, l_1 型及其重加权惩罚在抑制零抽头噪声与保护弱有效路径之间仍

存在矛盾，对于 l_0 理想稀疏约束的逼近仍存在局限。

基于上述考虑，本文面向手机直连卫星动态稀疏信道均衡场景，引入一种有理分式形式的稀疏惩罚函数，并将其并入LMS代价函数构造新的稀疏自适应滤波算法。该惩罚函数在零附近提供更强的收缩梯度以抑制噪声诱导的小系数扰动，同时在大幅度系数区域快速衰减以降低对显著抽头的惩罚，从而减小非零抽头的稳态误差，使更新机制在效果上更接近 l_0 范数的理想稀疏约束。为了在保持稀疏性的同时实现更快的收敛与更低的稳态误差，进一步考虑到为避免固定稀疏惩罚系数带来的参数依赖，本文提出自适应更新机制，使其随迭代过程依据误差信息自调整，在收敛初期增强稀疏促进以加速无效抽头抑制，在稳态阶段适当减弱惩罚以降低对有效抽头的收缩偏差，从而在收敛速度与稳态误差之间获得更佳折中。最后本文给出相应的随机梯度更新形式，并结合理论分析与仿真对比评估算法的收敛与稳态性能。

1 信道模型

在手机直连卫星场景中，小尺度信道通常由LoS主径叠加少量强反射或绕射回波构成。3GPP在NR-NTN评估里讨论卫星传播的时延扩展指出，在约2 GHz频段、一定仰角范围内，不同环境参数集对应的时延扩展大约在180 ns - 250 ns，并认为更高仰角时延扩展相当或更低^[17]。说明离散时延抽头数（有效多径数）通常比很多地面NLoS宽带场景少，卫星直连场景的有效时延支撑更短。若最大有效时延为 T_{\max} ，采样周期为 T_s ，则离散时延支撑长度近似为

$$L_h \approx \left\lceil \frac{T_{\max}}{T_s} \right\rceil + 1 \quad (1)$$

3GPP链路级评估采用NTN-TDL-C/D模型，其信道响应由有限个离散tap构成，且功率主要集中在LoS tap，其他少量散射tap功率显著低于LoS，因此离散时延域只有少数抽头承载主要能量，从而呈现稀疏性^[35]。

依据3GPP TR 38.811中关于NR-NTN的信道建模规范，NTN-TDL-C用于描述卫星直连场景下的视距传播条件。该模型由强直射分量与少量弱散射分量构成，功率主要集中在零时延主径附近，从

而在时延域呈现出显著的稀疏多径结构。下文给出3GPP TR 38.811中NTN-TDL-C在仰角为 $\alpha_{\text{model}} = 50^\circ$ 时的完整参数配置，并给出相应的仿真实现。

表1 NTN-TDL-C 信道模型

Tap	Normalized delay	Power in [dB]	Fading distribution
1	0	-0.394	LOS path
1	0	-10.618	Rayleigh
2	14.8124	-23.373	Rayleigh

表2 TDL模型的时延缩放示例参数

Model	DS_{desired}
Very short delay spread	10ns
Short delay spread	30ns
Nominal delay spread	100ns
Long delay spread	300ns
Very long delay spread	1000ns

表1给出在仰角 $\alpha_{\text{model}} = 50^\circ$ 的NTN-TDL-C模型，其中第1个抽头服从Rician分布，其K因子为10.224 dB，其中TR 38.811给出的为归一化时延，相对于最早到达径的额外延迟（实际超额时延）应按时延缩放规则进行缩放，表2给出不同场景下时延缩放示例参数 DS_{desired} 。

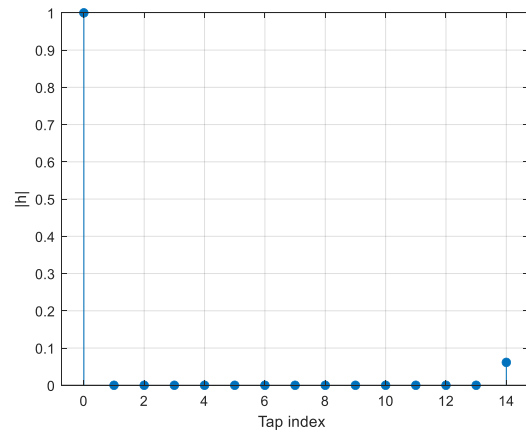


图1 NTN-TDL-C模型归一化抽头冲激响应幅度

表3 NTN-TDL-D 信道模型

Tap	Normalized delay	Power in [dB]	Fading distribution
1	0	-0.284	LOS path
1	0	-11.991	Rayleigh
2	0.5596	-9.887	Rayleigh
3	7.3340	-16.771	Rayleigh

表3给出在仰角 $\alpha_{\text{model}} = 50^\circ$ 的NTN-TDL-D模型，其中第1个抽头服从Rician分布，其K因子为

11.707 dB。

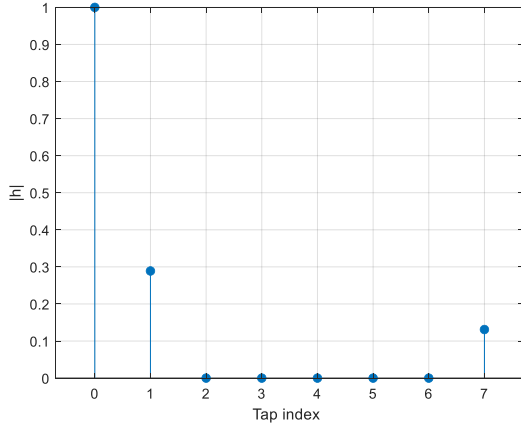


图2 NTN-TDL-D模型归一化抽头冲激响应幅度

图1和图2展示了基于3GPP TR 38.811标准配置的NR-NTN卫星直连信道特性，该类信道在离散时延域中通常表现为能量主要集中于视距主径及少数反射径，因而具有稀疏或近稀疏结构。对于本文所关注的LoS主径占优且离散时延支撑较短的手机直连卫星传播条件，该建模能够较好表征信道的主要结构特征，可作为后续稀疏自适应均衡算法设计的合理前提。

连续时延的多径叠加模型用时变冲激响应表示为

$$h(t, \tau) = \sum_{p=1}^P \alpha_p(t) \delta(\tau - \tau_p) \quad (2)$$

离散化得到时延抽头（采样间隔 T_s ），令 $t = nT_s$ ， $\tau = lT_s$

$$h[n, l] \triangleq h(nT_s, lT_s) = \sum_{p=1}^P \alpha_p[n] \delta[l - \ell_p] \quad (3)$$

式(3)表明只要可观测的路径数 P 很小，在 l 轴上只有少数tap的能量显著，即时延域稀疏。因此，在离散时延域内，只有少数能量足够显著，从而在该模型假设下时延域呈稀疏或近稀疏结构，可采用稀疏信道均衡方法。

2 系统模型与自适应均衡算法原理

2.1 系统模型

在时刻 n ，假设系统的观测输出信号 $y(n)$ 为

$$y(n) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(n) + v(n) \quad (4)$$

式(4)中， n 表示离散时间索引， $\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^T$ 是 $(N \times 1)$ 维的输

入信号向量， $(\mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_{N-1}]^T)$ 是长度为 N 的未知系统冲激响应向量， $(\cdot)^H$ 表示向量或矩阵的共轭转置操作， $v(n)$ 是均值为0，方差为 σ_v^2 的加性高斯白噪声，且与输入信号 $\mathbf{x}(n)$ 统计独立。

在稀疏信道场景下， \mathbf{w} 的非零系数个数 K ，远小于滤波器的长度 N （即 $K \ll N$ ），绝大多数抽头系数的数值为零或接近于零。

2.2 标准LMS算法

LMS算法旨在最小化均方误差，其随机梯度实现采用瞬时平方误差作为代价函数，其代价函数 $J_{LMS}(n)$ 为

$$J_{LMS}(n) = \frac{1}{2} |e(n)|^2 \quad (5)$$

其中 $e(n)$ 为 n 时刻的估计误差为

$$e(n) = y(n) - \mathbf{w}^H(n) \mathbf{x}(n) \quad (6)$$

利用随机梯度下降法，权值更新公式为

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \frac{\partial J_{LMS}(n)}{\partial \mathbf{w}^*(n)} = \mathbf{w}(n) + \mu e^*(n) \mathbf{x}(n) \quad (7)$$

式(7)中 μ 为步长因子，控制算法的收敛速度和稳态误差。

标准LMS以最小化均方误差为目标，其梯度更新对所有抽头采用一致的更新形式，并不会将那些近零的系数收缩到零附近；在噪声与相关输入的驱动下，这些无效抽头仍可能产生不必要的抖动与误更新。因此，传统LMS难以利用上述稀疏性先验，在稀疏系统条件下往往收敛较慢或稳态误差较大，需要引入稀疏约束，从而提升性能。

2.3 ZA-LMS算法

ZA-LMS算法^[34]有效利用系统的稀疏先验信息。该算法在标准LMS的二次代价函数中引入了 l_1 范数惩罚项，即 $\|\mathbf{w}(n)\|_1$ 。在随机梯度下降的迭代过程中，这一惩罚项产生了一个由步长控制的“零吸引子”项“ $-\rho \text{sgn}(\mathbf{w}(n))$ ”。该吸引子对所有抽头系数施加指向零点的收缩力，从而显著加速了那些接近于零的稀疏抽头的收敛速度。然而，ZA-LMS的核心缺陷在于其使用的 l_1 范数惩罚项在整个定义域内的导数（除零点外）均为常数。这意味着，算法在压缩冗余抽头的同时，对承载主要均衡作用的大系数抽头也施加了同等强度的收缩力，这种均匀收缩策略不可避免地导致稳态系数偏离真实值，从而引入固定的系数偏差。

代价函数为

$$L_1(n) = \frac{1}{2} |e(n)|^2 + \gamma \|\mathbf{w}(n)\|_1 \quad (8)$$

式(8)中 $\mathbf{w}(n)$ 表示第 n 次迭代时的均衡器权向量，表示为 $\mathbf{w}(n) = [w_0(n), w_1(n), \dots, w_{N-1}(n)]^T$ ，其中 $w_i(n)$ 表示第 n 次迭代时 $\mathbf{w}(n)$ 的第 i 个分量，为简化记号，在后续推导中 w_i 均表示 $w_i(n)$ 。

权值更新公式为

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \frac{\partial L_1(n)}{\partial \mathbf{w}^*(n)} = \quad (9)$$

$$\mathbf{w}(n) - \rho \text{sgn}(\mathbf{w}(n)) + \mu e^*(n) \mathbf{x}(n)$$

式(9)中 $\rho = \mu\gamma$ ，符号函数为

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} x/|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (10)$$

2.4 RZA-LMS 算法

为了克服 ZA-LMS 引入的稳态系数偏差，进一步提出了重加权零吸引 LMS 算法^[34]。RZA-LMS 采用对数和 (Log-sum) 函数，因为该函数在数学行为上比 l_1 范数更逼近 l_0 范数。通过对数函数的导数特性，RZA-LMS 构造了一个重加权的零吸引子，其收缩力度与抽头系数的幅值成反比。这种机制实现了选择性收缩：当抽头幅值较大时（信号区域），零吸引力迅速衰减，从而保护了主要信号分量不被过度压缩。

代价函数为

$$L_2(n) = \frac{1}{2} |e(n)|^2 + \gamma' \sum_{i=1}^N \log \left(1 + \frac{|w_i|}{\varepsilon'} \right) \quad (11)$$

得到权值更新公式为

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \rho \frac{\text{sgn}(\mathbf{w}(n))}{1 + \varepsilon' |\mathbf{w}(n)|} + \mu e^*(n) \mathbf{x}(n) \quad (12)$$

式(12)中 $\rho = \mu\gamma'/\varepsilon'$ ， $\varepsilon = 1/\varepsilon'$

当 $|w_i(n)| \gg 1/\varepsilon$ 时，对大抽头几乎不收缩，从而减少大系数偏置。

$$\frac{1}{1 + \varepsilon |w_i(n)|} \approx 0 \quad (13)$$

为了直观地比较 ZA-LMS 与 RZA-LMS 约束的零吸引特性，可从其惩罚函数的梯度随系数幅度的变化曲线进行分析，如图3所示。

图3描述了从抽头更新公式中的零吸引项分析上述不同稀疏算法的收缩特性，ZA-LMS 通过 l_1 范数产生常数收缩，对所有抽头施加近似相同的零吸引力，在推动微小抽头趋零的同时，显著抽头同样会受到影响，从而引入较大的稳态误差；为缓解大

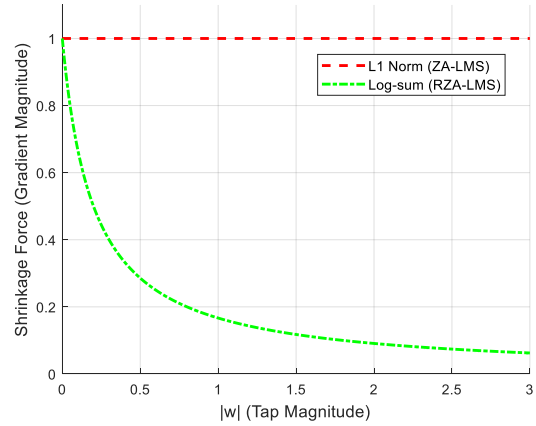


图3 稀疏惩罚梯度随系数幅度变化曲线

抽头偏置，RZA-LMS 采用重加权机制，使收缩强度随 $|w_i(n)|$ 增大而减弱，但衰减在大系数区域下降不够快，当非零抽头数增多或幅度差异较大时，大抽头仍可能产生比较大的偏置。相比之下，理想的 l_1 稀疏约束期望是，对真正的大抽头几乎不施加幅度惩罚，而对接近零的抽头施加强力压缩，以实现更具选择性的收缩特性。

3 基于有理分式稀疏惩罚与自适应因子优化的均衡方法

3.1 基于有理分式惩罚项的改进算法

从稀疏惩罚的设计角度看，零吸引机制的核心目标，是在增强稀疏促进能力的同时减小有效非零抽头的估计偏置。理想的惩罚函数应当在接近零的区域具有较大的局部梯度，以尽快压制噪声诱导的小系数扰动并推动无效抽头归零，同时在大系数区域减弱附加惩罚，避免对有效非零抽头施加持续过强的收缩。已有研究表明，非凸稀疏惩罚在一定条件下能够更接近理想 l_0 约束，其目标是在增强小系数压缩能力的同时减弱对大系数的附加收缩；其中，分式函数惩罚已被证明是一类具有代表性的非凸稀疏促进惩罚，并具有与 l_0 最小化相关的理论性质^[36-37]。

为了在非零抽头数增多或幅度差异较大时，仍期望获得对大系数更快衰减的选择性收缩。为此，本文构造有理式惩罚函数 $\phi(|w|) = |w|/(|w| + a)$ ，将其引入 LMS 随机梯度更新框架，以构造更具选择性的零吸引机制，其在小系数区具有较强稀疏促进能力，而在大系数区使零吸引力快速衰减趋于饱和，从而更接近 l_0 的稀疏特性。

代价函数为

$$J_{\text{Rat}}(n) = \frac{1}{2} |e(n)|^2 + \gamma \sum_{i=1}^N \frac{|w_i(n)|}{|w_i(n)| + a} \quad (14)$$

得到权值更新公式为

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \frac{\partial J_{\text{Rat}}(n)}{\partial \mathbf{w}^*(n)} \quad (15)$$

由式(14)可知, 代价函数由误差项和稀疏惩罚项组成, 对式(15)右边项展开

$$\frac{\partial J_{\text{Rat}}(n)}{\partial \mathbf{w}^*(n)} = -e^*(n) \mathbf{x}(n) + \gamma \left(\frac{a}{(|\mathbf{w}(n)| + a)^2} \right) \text{sgn}(\mathbf{w}(n)) \quad (16)$$

令 $\rho = \mu\gamma$, 进一步化简得到

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu e^*(n) \mathbf{x}(n) - \rho \left(\frac{a}{(|\mathbf{w}(n)| + a)^2} \right) \text{sgn}(\mathbf{w}(n)) \quad (17)$$

将其中第 i 个稀疏约束项记为

$$F_{\text{RAT}}(w_i) = \rho \frac{a}{(|w_i| + a)^2} \text{sgn}(w_i) \quad (18)$$

由式(18)可知, 有理式零吸引项的强度与当前抽头幅值直接相关。当 $|w_i(n)|$ 接近于 0 时, 由于 $\frac{a}{(|w_i| + a)^2} \approx \frac{1}{a}$, 表达式 $F_{\text{RAT}}(w_i) \approx \frac{\rho}{a} \text{sgn}(w_i)$ 此时算法对微小抽头施加更强的稀疏驱动, 促使抽头快速归零, 从而加快收敛。当 $|w_i(n)|$ 较大时, 表达式 $F_{\text{RAT}}(w_i) \approx \rho \frac{a}{|w_i|^2} \text{sgn}(w_i)$, 零吸引力以 $1/|w_i(n)|^2$ 快速衰减, 即减少对大系数偏置。与 ZA-LMS 的常数型零吸引相比, 所提方法可有效降低对大抽头的持续压缩偏置; 与 RZA-LMS 的重加权对数惩罚相比, 所提方法在大系数区域的惩罚衰减更快, 从而更有利于保护弱有效路径和降低稳态误差。本文对现有稀疏 LMS 方法的改进体现在零吸引形状的重构, 即在不改变 LMS 基本随机梯度框架的前提下, 实现在接近零点时具有更高的局部压缩强度, 而在大系数区域对有效抽头的附加收缩衰减更快的特性。

3.2 自适应因子优化算法

参数 ρ 起到了调节收敛速度与稳态误差平衡的作用, 考虑到实际通信环境的非平稳特性, 固定参数的算法往往难以保持最优性能, 为了提升算法在

复杂环境下的性能, 将 ρ 调整为自适应变量 $\rho(n)$ 。其核心思想建立误差信号与控制因子之间的动态反馈关系, 这正是本文所提出的在 Rational-LMS 基础上进一步优化的算法。

定义误差权值为

$$\tilde{\mathbf{w}}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w} \quad (19)$$

把权值更新公式和估计误差代入, 取期望为

$$E[\tilde{\mathbf{w}}(n)] = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}) E[\tilde{\mathbf{w}}(n-1)] - \rho E[\mathbf{g}(\mathbf{w}(n-1))] \quad (20)$$

式(20)中, $\mathbf{g}(\mathbf{w})$ 表示为

$$\mathbf{g}(\mathbf{w}) = \left(\frac{a}{(|\mathbf{w}| + a)^2} \right) \text{sgn}(\mathbf{w}) \quad (21)$$

向量形式为 $\mathbf{g}(\mathbf{w}(n)) = [g_0(w_0(n)), g_1(w_1(n)), \dots, g_{N-1}(w_{N-1}(n))]^T$, 其第 i

个分量表示为

$$g_i(w_i(n)) = \frac{a \text{sgn}(w_i(n))}{(|w_i(n)| + a)^2} \quad (22)$$

由于惩罚项主要调节稳态偏置和抽头压缩, 对任意 i 均有 $|g_i(w_i(n))| \leq \frac{1}{a}$ 为有界项, 从而构成有界扰动, 所以均值收敛仍为 LMS 的收敛条件, 即

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}} \quad (23)$$

令 $n \rightarrow \infty$ 收敛为

$$E[\mathbf{w}(\infty)] = \mathbf{w} - \frac{\rho}{\mu} \mathbf{R}^{-1} E[\mathbf{g}(\mathbf{w}(\infty))] \quad (24)$$

式(24)中 \mathbf{R} 表示输入向量 $\mathbf{x}(n)$ 的协方差矩阵, λ_{\max} 为 \mathbf{R} 的最大特征值。

但是 ρ 会引入偏置项, 为了减小稳态偏差, 提高均衡性能, ρ 必须趋近于 0。但这与加速收敛 (ρ 的取值较大) 的需求相悖。

从稳态 Excess MSE 角度分析:

$$\alpha_{1,\text{Rat}} = E[\mathbf{g}^T(\mathbf{w}(\infty))(\mathbf{I} - \mu \mathbf{R})^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{w}(\infty))] \quad (25)$$

$$\alpha_{2,\text{Rat}} = E \left[\sum_{i=1}^N (w_i(\infty) - w_i) \frac{a}{(|w_i(\infty)| + a)^2} \text{sgn}(w_i(\infty)) \right] \quad (26)$$

$$P_{\text{ex,Rat}}(\infty) = P_{\text{ex,LMS}}(\infty) + \frac{\alpha_{1,\text{Rat}}}{(2 - \eta)\mu} \rho \left(\rho - \frac{2\alpha_{2,\text{Rat}}}{\alpha_{1,\text{Rat}}} \right) \quad (27)$$

如果使 $P_{\text{ex,Rat}}(\infty) < P_{\text{ex,LMS}}(\infty)$, 就必须满足 $0 < \rho < \frac{2\alpha_{2,\text{Rat}}}{\alpha_{1,\text{Rat}}}$, 这就意味着 ρ 的取值存在一个区间。且

其大小直接影响收敛速度与稳态偏置。为避免固定 ρ 难以同时兼顾收敛与偏置的问题，本文采用误差驱动的自适应 $\rho(n)$ 机制，初始阶段保持较大 ρ 以强化稀疏收缩并加速收敛，稳态阶段逐步减小 ρ 以减弱对非零抽头的惩罚，从而降低偏置并提升稳态精度。

为实现上述目标，本文采用如下误差驱动形式：

$$\rho(n) = \rho_0(1 - \exp(-\lambda|e(n)|^2)) \quad (28)$$

式(28)中， ρ_0 为自适应因子的调节上限， λ 控制自适应灵敏度。

在算法收敛初期，当误差较大时， $\rho(n)$ 取较大值，以增强稀疏约束作用并提高收敛速度；而在稳态阶段，随着误差逐渐减小，自适应因子相应减小，从而减弱对非零抽头的过度惩罚，降低稳态偏置。因此，该误差驱动机制能够较好地协调收敛速度与稳态性能之间的关系。

对式(28)求导得到

$$\frac{\partial \rho(n)}{\partial |e(n)|^2} = \rho_0 \lambda e^{-\lambda|e(n)|^2} \quad (29)$$

λ 代表 $\rho(n)$ 对误差能量变化的敏感程度，参数 λ 为正常数，即 $\lambda > 0$ 。较小的 λ 使 $\rho(n)$ 随误差变化过于平缓，自适应调节作用较弱；较大的 λ 则会使 $\rho(n)$ 在较宽误差范围内迅速接近上限，从而削弱误差驱动调节的分辨能力，并可能增大稳态阶段对误差波动的敏感性， λ 的选取体现了收敛速度，稀疏强度与稳态偏置之间的折中关系。

图4表示不同 λ 情况下自适应因子 $\rho(n)$ 的动态演化过程。由式(28)可知， $\rho(n)$ 的直接驱动量为瞬

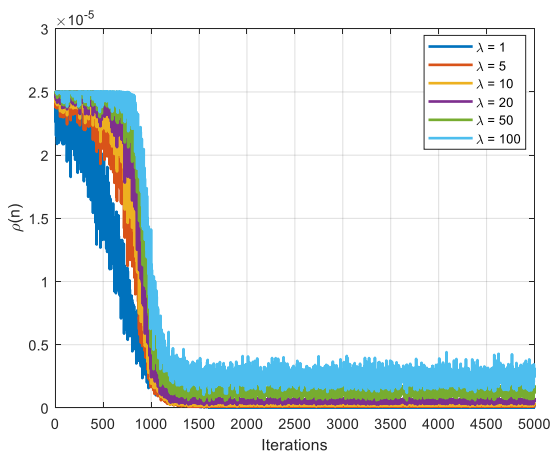


图4 不同 λ 情况下自适应因子的动态变化

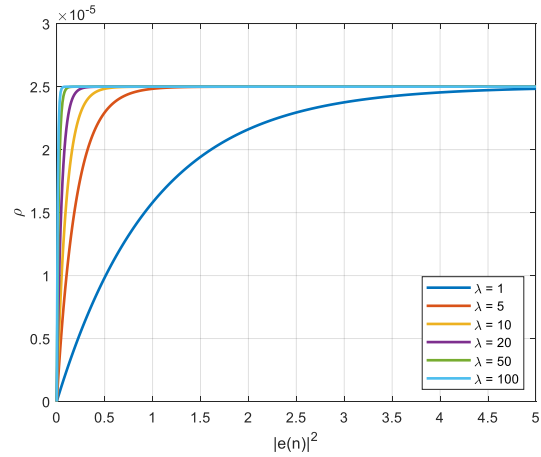


图5 不同 λ 情况下自适应因子随误差能量的过渡特性

时误差能量 $|e(n)|^2$ ，因此图4虽然以迭代次数 n 为横轴，但其本质上反映的是误差随迭代衰减时所引起的 $\rho(n)$ 动态变化。在收敛初期，由于误差较大， $\rho(n)$ 在较长区间内保持接近上界（仿真中取 $\rho_0 = 2.5 \times 10^{-5}$ ），从而增强零吸引作用并加快无效抽头压缩；随着算法逐步收敛，误差能量进入非线性过渡区， $\rho(n)$ 开始明显减小；进入稳态后， $\rho(n)$ 在较低水平附近小幅波动，其变化主要由残余误差和噪声扰动共同决定。可以看出， λ 越大， $\rho(n)$ 在较长迭代区间内保持较强的稀疏约束，曲线下落相对较晚； λ 较小时， $\rho(n)$ 更早进入衰减阶段，自适应调节作用相对平缓。

图5进一步展示不同 λ 情况下自适应因子 ρ 关于误差能量 $|e(n)|^2$ 的映射关系。取 $|e(n)|^2 \in [0, 5]$ 是由于，在该区间已足以覆盖仿真中各条映射曲线从低值到接近饱和上界的主要变化过程。该范围能够较清晰地反映不同 λ 下灵敏度差异。随着 $|e(n)|^2$ 增大， ρ 单调增大并逐渐趋近于上界 ρ_0 ，参数 λ 决定该映射对误差变化的灵敏度，较小的 λ 使 ρ 随误差变化较为平缓，较大的 λ 则会使 ρ 在较宽误差范围内迅速接近上界。综合收敛速度与稳态误差，本文后续仿真中取 $\lambda = 50$ 。

4 仿真测试

4.1 稀疏算法仿真实验

实验方法参考了文献^[34]关于稀疏系统识别的仿真框架，ZA-LMS与RZA-LMS的代价函数及更新公式采用该文献中的定义，本文在其基础上引入有理分式惩罚进行对比。结合本文所研究的手直连

卫星稀疏信道场景，进行了相应扩展与调整。

实验 1：对比三种稀疏算法中惩罚项的零吸引梯度特性

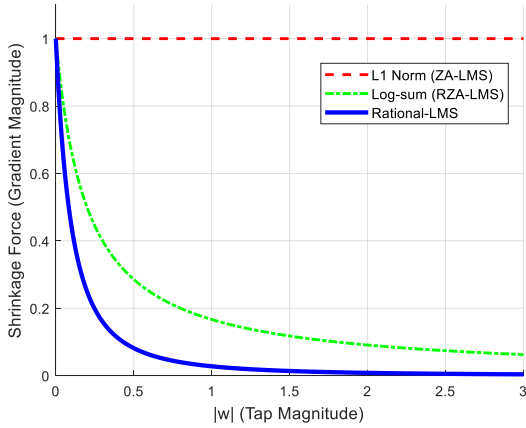


图 6 三种稀疏均衡算法的零吸引强度比较

图 6 展示了不同稀疏惩罚对应的零吸引梯度幅度随抽头幅度的变化关系。ZA-LMS 的收缩力度为常数，虽然能加速小系数归零，但会对非零大抽头产生持续压缩，导致偏置。RZA-LMS 通过重加权使收缩随 $|w|$ 增大而衰减，从而缓解了 ZA 的偏置。本文有理式惩罚的收缩呈更快的衰减特性，使算法在小系数区保持强稀疏促进能力的同时，对大系数的惩罚迅速减弱，更有利于降低大系数偏置并改善稳态性能。

实验 2：评估三种算法对稀疏信道的跟踪能力。

系统模型为一个长度为 16 的 FIR 滤波器。信道冲激响应分为以下三个阶段：阶段 1 ($n=1\sim 500$)：仅有一个抽头为 1，其余为 0（高度稀疏）；阶段 2 ($n=501\sim 1000$)：所有奇数位置抽头变为 1，偶数位置为 0（半稀疏）；阶段 3 ($n=1001\sim 1500$)：奇数位置保持为 1，偶数位置变为 -1（完全非稀疏），观测噪声为零均值复高斯白噪声，方差为 $\sigma^2 = 10^{-3}$ ，下图是各算法的均方偏差（MSD, mean square deviation）仿真结果。

图 7 表明在第一阶段的高度稀疏条件下，ZA-LMS、RZA-LMS 与 Rational-LMS 均明显优于标准 LMS，说明引入零吸引稀疏约束可有效加速压零并降低稳态失配。其中，Rational-LMS 由于零吸引强度对大系数衰减更快，能够在保留强压零能力的同时减小大抽头偏置，因此获得最低的稳态 MSD。在第二阶段稀疏性减弱时，ZA-LMS 的稳

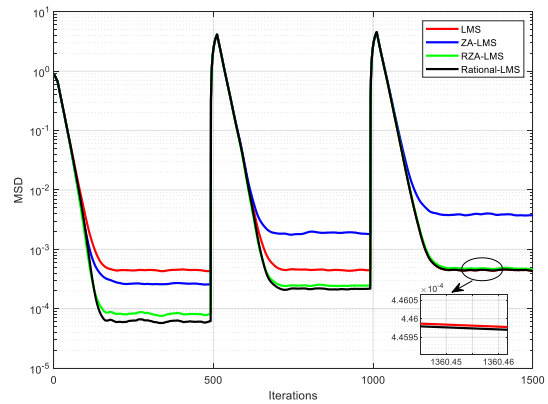


图 7 16 阶分段变化系统的 MSD 跟踪性能

态误差上升更为明显，而 RZA-LMS 与 Rational-LMS 仍保持较优性能。在第三阶段系统接近非稀疏时，稀疏约束带来的优势进一步收敛，RZA-LMS 与 Rational-LMS 的性能接近。图 7 中右下角插图对稳态区域进行放大，可观察到 Rational-LMS 仍保持略低于 RZA-LMS 的稳态 MSD，表明所提有理式零吸引在稀疏性降低条件下仍能维持较小的偏置与更稳定的稳态表现。实验 3：模拟更接近实际通信场景的高阶稀疏信道，并比较三种算法的性能

滤波器长度设为 256，其中仅随机选取 14 个非零抽头（幅值为 ± 1 ），其余均为零。

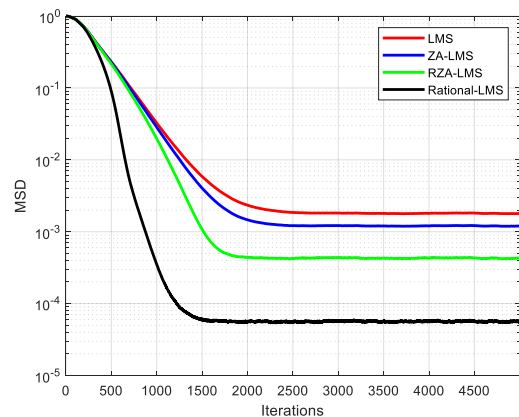


图 8 长稀疏系统的 MSD 收敛性能对比

图 8 表明在长稀疏系统设定下，所提 Rational-LMS 在收敛速度与稳态性能方面均优于 ZA-LMS 与 RZA-LMS，说明有理式零吸引项在保持强压零能力的同时，对大系数施加更弱收缩，从而有效减小大抽头偏置并改善稳态失配。

4.2 有理分式稀疏与自适应稀疏算法仿真实验

实验1：为验证所提有理式稀疏 LMS 及其自适应零吸引参数机制在长稀疏系统中的性能，本节考虑一个长度为 $L=256$ 的稀疏系统。系统仅包含 $K=14$ 个非零抽头，其位置由均匀随机方式选取，非零幅度取 ± 1 。观测噪声为零均值复高斯白噪声，方差为 $\sigma^2 = 10^{-3}$ 。

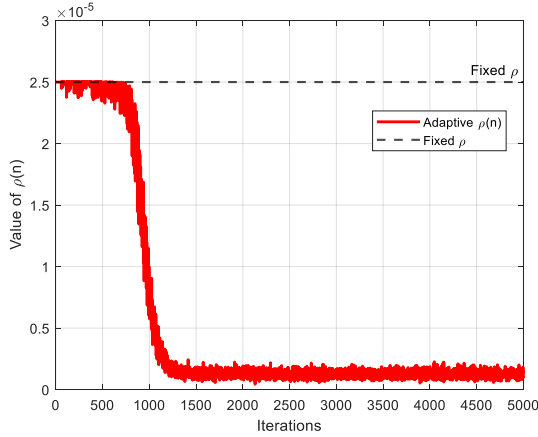


图9 误差驱动的自适应零吸引强度 ρ 动态演化

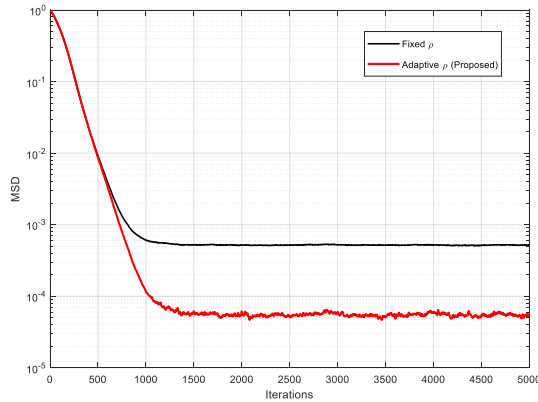


图10 MSD收敛性能对比

图9表明在收敛过程中随误差自动调节零吸引强度，曲线的转折位置对应误差能量由大误差区进入非线性过渡区的时刻。在收敛初期误差较大，因此 $\rho(n)$ 保持在较高水平，增强零吸引作用并加快无效抽头压缩，随着迭代进行，误差逐渐减小， $\rho(n)$ 同步下降，减弱对有效非零抽头的过度收缩。与固定参数相比，这种改进不仅增强了算法在初始阶段的跟踪能力，更确保了在稳态阶段能够通过自适应因子来降低稳态误差。

从图10和图11的 Excess MSE 与 MSD 曲线可

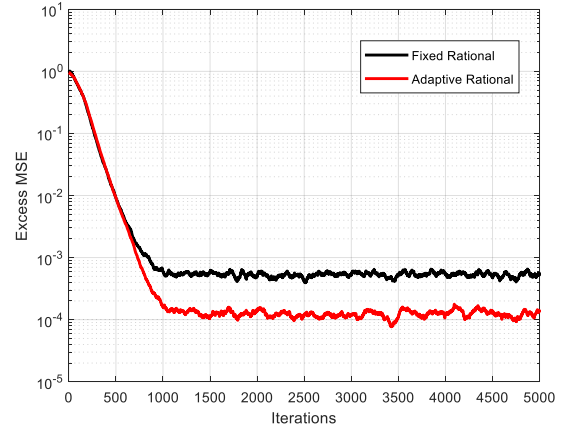


图11 Excess MSE收敛与稳态对比

观察到，相比固定参数的 Rational-LMS，所提出的自适应 ρ 机制在收敛阶段实现更快的误差下降，并在稳态阶段获得更低的残余误差。其原因在于自适应零吸引强度能够根据瞬时误差大小进行动态调节：在大误差阶段保持较强收缩以充分挖掘稀疏性，而在小误差阶段自动减弱收缩以降低对非零抽头的偏置。引入误差驱动的自适应因子后，稀疏约束强度能够在收敛初期和稳态阶段之间动态切换，从而实现更好的收敛速度与稳态偏置折中。

实验2：为评估稀疏先验对自适应信道均衡性能的提升，本文在稀疏信道下对 LMS、ZA-LMS、RZA-LMS 及 Rational-LMS（固定/自适应 ρ ）进行仿真对比，衡量收敛速度与稳态误差。

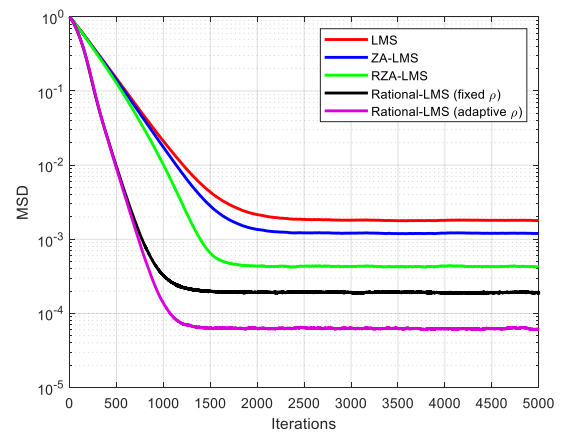


图12 各算法收敛曲线对比

该实验面向长稀疏系统，比较了固定参数 Rational-LMS 与所提出的自适应 ρ 的 Rational-LMS，并结合 ZA-LMS 与 RZA-LMS 的典型特性进行分析。图12仿真结果表明，自适应 Rational-

LMS 收敛阶段下降更快，稳态误差更低。其机理在于 ρ 能随误差能量动态调节零吸引强度，在收敛初期和稳态阶段之间动态变化，在误差较大时保持较强稀疏收缩以加速零抽头压缩，误差较小时自动减弱收缩以降低非零抽头的过度惩罚，从而实现前期加速收敛、后期降低偏置与稳态误差的有效折中。

4.3 动态信道下各算法性能仿真实验

该仿真实验建立在信道具有稀疏或近稀疏结构的前提下。若传播环境转为莱斯非稀疏信道，在步长满足 LMS 型均值稳定条件且稀疏惩罚参数有界的前提下，算法通常不会仅由于零吸引项而直接失稳；但极端情况下可能退化到接近或劣于标准 LMS。因此，本文所提方法更适用于 LoS 主径占优且离散时延域呈稀疏或近稀疏结构的手机直连卫星信道。

实验 1：为分析在慢时变稀疏系统中的参数跟踪能力，本文构造长度为 256 的稀疏系统，其中仅包含 14 个非零抽头，非零抽头的幅值按照一阶自回归过程随时间缓慢变化。参考时变稀疏系统识别研究中常用的慢时变稀疏参数建模思路，评估算法对缓慢时变稀疏系统的适应性^[38]。仿真结果如图 13 所示。

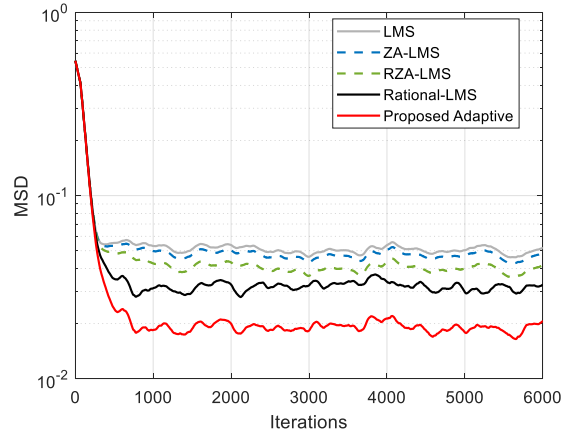


图 13 慢时变稀疏信道环境下的算法性能比较

实验 2：为验证各个算法在动态手机直连卫星信道条件下的跟踪性能，本文依据 3GPP TR 38.811 中的 NTN-TDL-C 和 NTN-TDL-D 模型参数仿真。该两类模型属于视距传播条件下的有限抽头 TDL 信道，能够表征手机直连卫星场景中主径占优、少量弱散射并存的时延结构，信道路径时延和平均功率配置依据 3GPP NTN-TDL 模型参数设置。考虑卫星运动及传播环境变化带来的时变特性，在仿真中进一步引入多普勒相位旋转和散射分量的时变，以构造动态非平稳卫星信道环境。

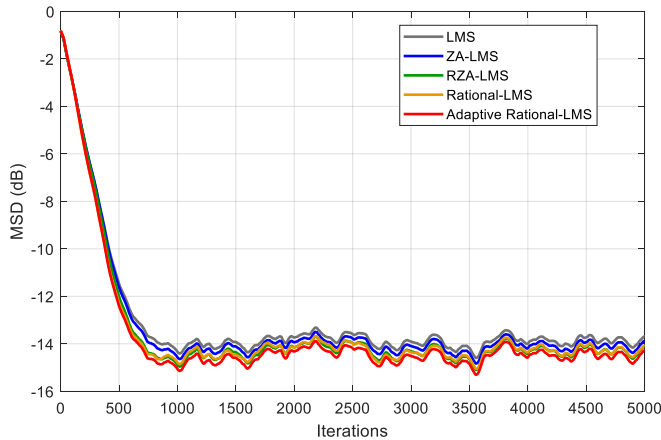


图 14 动态 NTN-TDL-C 信道下各算法的 MSD 跟踪性能比较

图 14 和图 15 给出了各算法在动态 NTN-TDL-C/NTN-TDL-D 信道下的 MSD 曲线。可以看出，各算法在初始阶段均能实现快速收敛；进入稳态后，由于信道持续变化，MSD 曲线围绕某一跟踪误差水平上下波动。与其它算法相比，所提自适应稀疏算法在多数迭代区间内保持较低的 MSD 水平，

说明其在动态信道下具有更好的跟踪性能。可以说明本文采用的有理式惩罚项对大系数具有更快的衰减特性，在保持稀疏加速能力的同时进一步保护非零抽头、减小偏置；结合误差驱动的自适应 ρ 后，整体上可获得相比固定 ZA/RZA 类方法更快得收敛，同时稳态性能提升。

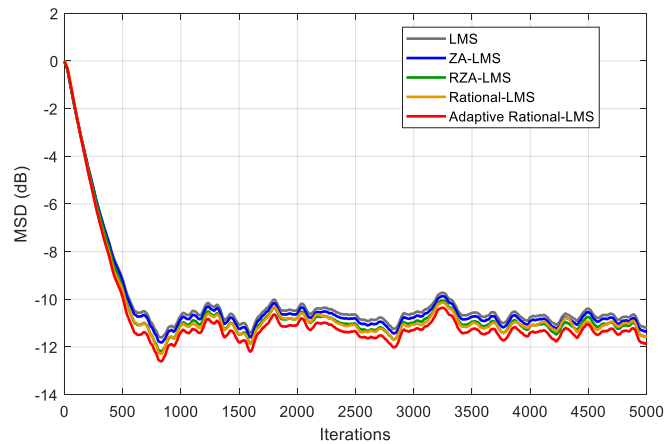


图15 动态NTN-TDL-D信道下各算法的MSD跟踪性能比较

5 结束语

本文面向手机直连卫星场景下 LoS 主径占优、离散时延支撑较短的稀疏或近稀疏信道均衡问题，构造了一种有理分式稀疏惩罚函数，并在最小均方框架下引入惩罚项，建立了相应的稀疏自适应均衡算法。与 ZA/RZA 稀疏惩罚形式相比，所提惩罚函数在零附近保持较强的压缩能力，在大系数区域能够更快减弱附加收缩，从而有助于在增强稀疏促进能力的同时减小有效非零抽头的稳态偏置。在此基础上，本文进一步引入误差驱动的自适应稀疏因子更新机制，使零吸引强度能够随误差动态调节，从而在收敛初期增强对无效抽头的抑制作用，在稳态阶段减弱对有效抽头的过度收缩。理论分析与仿真结果表明，所提方法在手机直连卫星稀疏信道条件下具有良好的收敛性能和稳态性能，验证了有理分式稀疏约束及其自适应调节机制在该场景下的有效性。

参考文献：

- [1] LI K, GAO X, XIA X. Channel estimation for LEO satellite massive MIMO OFDM communications[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2023, 22(11): 7537-7550.
- [2] YEH B H, WU J M, CHANG R H. Efficient Doppler compensation for LEO satellite downlink OFDMA systems[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2024, 73(12): 18863-18877.
- [3] TUZI D, FLORES AGUILAR E, DELAMOTTE T, KARABULUT KURT G, et al. Distributed approach to satellite direct-to-cell connectivity in 6G non-terrestrial networks[J]. IEEE Wireless Communications, 2023, 30(6): 28-34.
- [4] LIN X, LIN Z, LÖWENMARK S E, et al. Doppler shift estimation in 5G new radio non-terrestrial networks[C]//2021 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM). Madrid: IEEE, 2021: 1-6.
- [5] KIM Y J, HA S W, CHO Y S. A Doppler-Tolerant Synchronization Method for 5G NR-Based Non-Terrestrial Networks[J]. IEEE Communications Letters, 2024, 28(3): 617-621.
- [6] ARANITI G, IERA A, PIZZI S, et al. Toward 6G Non-Terrestrial Networks[J]. IEEE Network, 2022, 36(1): 113-120.
- [7] PAWASE C J, CHANG K H. Demodulation Reference Signal (DM-RS) based channel estimation for non-terrestrial networks to support high mobility[J]. ICT Express, 2024, 10(1): 46-52.
- [8] DARYA A M, ABDALLAH S. Semi-Blind Channel Estimation for Massive MIMO LEO Satellite Communications[J]. IEEE Communications Letters, 2025, 29(1): 75-79.
- [9] ZHOU Z, LIU L, XU J, CALDERBANK R. Learning to equalize OTFS[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2022, 21(9): 7723-7736.
- [10] SURABHI G D, CHOCKALINGAM A. Low-complexity linear equalization for OTFS modulation[J]. IEEE Communications Letters, 2020, 24(2): 330-334.
- [11] WANG X, SHEN W, XING C, et al. Joint Bayesian Channel Estimation and Data Detection for OTFS Systems in LEO Satellite Communications[J]. IEEE Transactions on Communications, 2022, 70(7): 4386-4399.
- [12] JIANG Z, SHI H, ZHANG Y, et al. Channel Estimation with OTFS Modulation for Random Access in LEO Satellite Communications[C]//2024 IEEE 99th Vehicular Technology Conference (VTC2024-Spring). Singapore: IEEE, 2024: 1-6.
- [13] LIU Y, CHEN M, PAN C, et al. OTFS vs OFDM: Which is Superior in Multiuser LEO Satellite Communications[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2025, 43(1): 139-155.
- [14] SHEN B, WU Y, AN J, et al. Random Access With Massive MIMO-OTFS in LEO Satellite Communications[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2022, 40(10): 2865-2881.
- [15] 3GPP. Study on using satellite access in 5G[R]. 3GPP TR 22.822,

- 2018.
- [16] 3GPP. Study on New Radio (NR) to support non-terrestrial networks[R]. 3GPP TR 38.811 V15.4.0, 2020.
- [17] LIN X, ROMMER S, EULER S, et al. 5G from Space: An Overview of 3GPP Non-Terrestrial Networks[J]. IEEE Communications Standards Magazine, 2021, 5(4): 147-153.
- [18] YANG Y, IHALAINEN T, RINNE M, et al. Frequency-Domain Equalization in Single-Carrier Transmission: Filter Bank Approach [J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2007: 10438.
- [19] SAHOO S, BARAPATRE Y K, SAHOO H K, et al. FPGA implementation of fuzzy sparse adaptive equalizer for indoor wireless communication systems[J]. Applied Soft Computing, 2021, 111: 107616.
- [20] WANG Z, CHEN F, YU H, et al. Sparse decision feedback equalization for underwater acoustic channel based on minimum symbol error rate[J]. International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering, 2021, 13: 617-627.
- [21] LEE H S, LEE J W, SONG W J, et al. Adaptive algorithm for sparse system identification based on hard-thresholding techniques [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2020, 67(12): 3597-3601.
- [22] CHEN D S, CHOU K S, WANG Y W. A new block-based stochastic adaptive algorithm for sparse echo cancellation[C]//2010 2nd International Conference on Signal Processing Systems. Dalian, China. IEEE, 2010: V1-756-V1-760.
- [23] MAYYAS K. Performance analysis of the selective coefficient update NLMS algorithm in an undermodeling situation[J]. Digital Signal Processing, 2013, 23(6): 1967-1973.
- [24] LI Y, GU Y, TANG K. Parallel NLMS filters with stochastic active taps and step-sizes for sparse system identification[C]//2006 IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing. Toulouse, France. IEEE, 2006: III.
- [25] LIMA M V S, FERREIRA T N, MARTINS W A, et al. Sparsity-aware data-selective adaptive filters[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(17): 4557-4572.
- [26] GODAVARTI M, HERO A O. Partial update LMS algorithms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(7): 2382-2399.
- [27] DAS R L, CHAKRABORTY M. A zero attracting proportionate normalized least mean square algorithm[C]//Proceedings of The 2012 Asia Pacific Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference. Hollywood, CA, USA. IEEE, 2013: 1-4.
- [28] DUTTWEILER D L. Proportionate normalized least-mean-squares adaptation in echo cancelers[J]. IEEE Transactions on Speech and Audio Processing, 2000, 8(5): 508-518.
- [29] XU H, CARAMANIS C, MANNOR S. Robust regression and lasso[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(7): 3561-3574.
- [30] CANDÈS E J. Compressive sampling[M]// Proceedings of the International Congress of Mathematicians Madrid, August 22 - 30, 2006. Zürich: EMS Press, 2007: 1433-1452.
- [31] CANDÈS E J, WAKIN M B, BOYD S P. Enhancing sparsity by reweighted ℓ_1 minimization[J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2008, 14(5/6): 877-905.
- [32] BARANIUK R G. Compressive sensing [Lecture Notes][J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(4): 118-121.
- [33] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [34] CHEN Y, GU Y, HERO A O. Sparse LMS for system identification [C]//2009 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Taipei, China: IEEE, 2009: 3125-3128.
- [35] PENG L, ZHANG Y. Massive MIMO-OTFS satellite communication channel estimation based on improved 3D-SOMP[C]//2025 4th International Symposium on Computer Applications and Information Technology (ISCAIT). Xi'an, China. IEEE, 2025: 1377-1381.
- [36] BACH F, JENATTON R, MAIRAL J, et al. Optimization with Sparsity-Inducing Penalties[J]. Foundations and Trends in Machine Learning, 2012, 4(1): 1-106.
- [37] LI H, ZHANG Q, CUI A, et al. Minimization of Fraction Function Penalty in Compressed Sensing[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2020, 31(5): 1626-1637.
- [38] NIEDŹWIECKI M, GAŃCZA A, SHEN L, et al. Adaptive identification of sparse underwater acoustic channels with a mix of static and time-varying parameters[J]. Signal Processing, 2022, 200: 108664